

I

A: $\frac{1}{3}$ の確率で +1 $\frac{2}{3}$ の確率で 0B: $\frac{1}{9}$ の確率で +3 $\frac{2}{9}$ の確率で +1 $\frac{5}{9}$ の確率で ± 0 $\frac{1}{9}$ の確率で 元に戻る

(問1)

A は m 回勝って $n - m$ 回はあいこか負けるので

$$x_{n,m} = {}_n C_m \left(\frac{1}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$

(問2)

2 回のゲームの後には B は $m = 6, 4, 3, 2, 1, 0$ のいずれかにいる. $m = 6$ のとき

$$\text{パーで 2 回続けて勝つ} : \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

 $m = 4$ のとき

$$\text{パーで勝つ 及び グーかチョキで勝つがそれぞれ 1 回ずつ} : {}_2 C_1 \left(\frac{1}{9}\right) \left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{81}$$

 $m = 3$ のとき

$$1 \text{ 回目にあいこまたは負けて, 2 回目にパーで勝つ} : \frac{2}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$$

$$1 \text{ 回目にパーで勝って, 2 回目にあいこまたはグーかチョキで負ける} : \frac{1}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{81}$$

$$\therefore \frac{2}{27} + \frac{5}{81} = \frac{11}{81}$$



$m = 2$ のとき

$$\text{グーかチョキで2回続けて勝つ} : \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

$m = 1$ のとき

$$1 \text{ 回目にあいこまたは負けて, 2 回目にグーかチョキで勝つ} : \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{27}$$

$$1 \text{ 回目にグーかチョキで勝って, 2 回目にあいこまたはグーかチョキで負ける} : \frac{2}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{10}{81}$$

$$\therefore \frac{4}{27} + \frac{10}{81} = \frac{22}{81}$$

$m = 0$ のとき

$$1 \text{ 回目はなんでもあり, 2 回目にパーで負ける} : \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{27}$$

$$1 \text{ 回目にパーで負けて, 2 回目にあいこまたはグーかチョキで負ける} : \frac{1}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{81}$$

$$\text{あいこまたはグーかチョキで負けることが2回続く} : \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{81}$$

$$\therefore \frac{1}{9} + \frac{5}{81} + \frac{25}{81} = \frac{39}{81} = \frac{13}{27}$$

以上より

i	0	1	2	3	4	5	6	7以上
y_i	$\frac{13}{27}$	$\frac{22}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{11}{81}$	$\frac{4}{81}$	0	$\frac{1}{81}$	0

(問3)

(i) パーで負けることがないとき

B はあいこまたはグーかチョキで負けることを n 回繰り返すので $\left(\frac{5}{9}\right)^n$

(ii) 最後にパーで負けるのが k 回目のとき ($1 \leq k \leq n$)

B は始めの $k-1$ 回はなんでもあり, k 回目にパーで負けて残り $n-k$ 回はあいこまたはグーかチョキで負ける

$$1^{k-1} \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k}$$



よって

$$\begin{aligned} Z_n &= \left(\frac{5}{9}\right)^n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{\frac{1}{9} \left\{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}}{1 - \frac{5}{9}} \\ &= \left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{1}{4} \left\{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{1 + 3 \left(\frac{5}{9}\right)^n\right\} \end{aligned}$$



II

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z}$$

(問1)

$$z = r(\cos \theta - i \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ とおくと}$$

$$\bar{z} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ となるので}$$

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$r = 0$ のときは成立. $r \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \sin \theta &= \cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) \\ &= \cos \left(-\frac{\pi}{3} - \theta \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} - \theta \right) \end{aligned}$$

よって

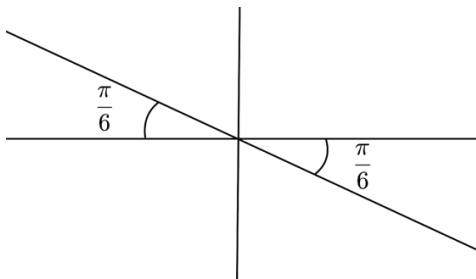
$$\theta = -\frac{\pi}{3} - \theta + 2n\pi$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \theta = n\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

よって, z は $\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ という直線を表す.



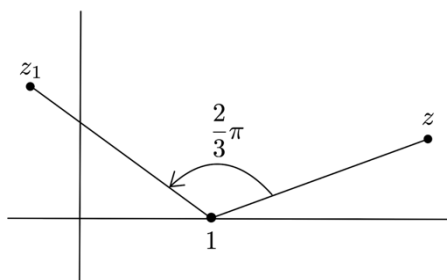
(問2)

対称点を z' とおくと

$$\begin{aligned} z' &= \overline{\omega \times \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{\omega} \end{aligned}$$

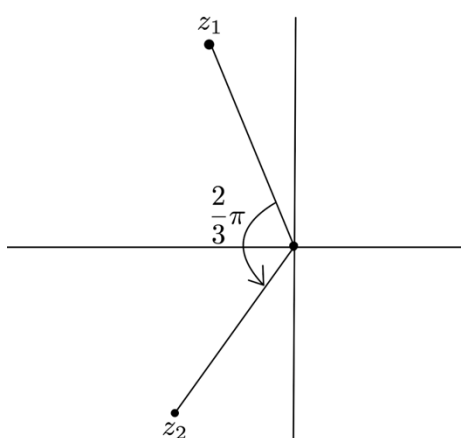


(問3)



$$z_1 - 1 = \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) (z - 1)$$

$$\therefore z_1 = \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) (z - 1) + 1$$



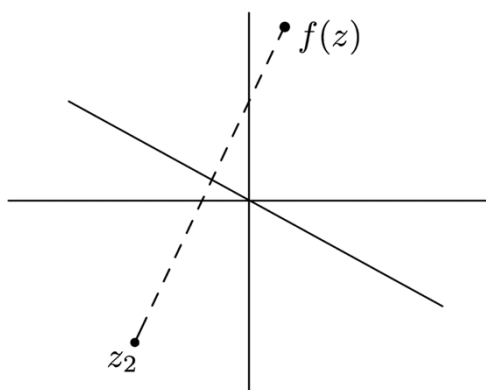
$$z_2 = \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) z_1$$

$$= \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \left\{ \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) (z - 1) + 1 \right\}$$

$$= \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) (z - 1) + \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$= \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) z - \cos \frac{4}{3}\pi - i \sin \frac{4}{3}\pi + \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$= \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) z + \sqrt{3}i$$



$$f(z) = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z}_2$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left\{ \left(\cos \frac{4}{3}\pi - i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \bar{z} - \sqrt{3}i \right\}$$

$$= \left(\cos \frac{5}{3}\pi - i \sin \frac{5}{3}\pi \right) \bar{z} - \sqrt{3}i \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$= - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \bar{z} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



(問4)

$$f(z) = -z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{z} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{z} = -z$$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと ($0 \leq \theta < 2\pi$)

$$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)r(\cos \theta - i \sin \theta) = -r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\}$$

$r = 0$ のとき成立. $r \neq 0$ のとき

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$$

$$\theta + \pi = \frac{\pi}{3} - \theta + 2k\pi \quad k \text{ は整数}$$

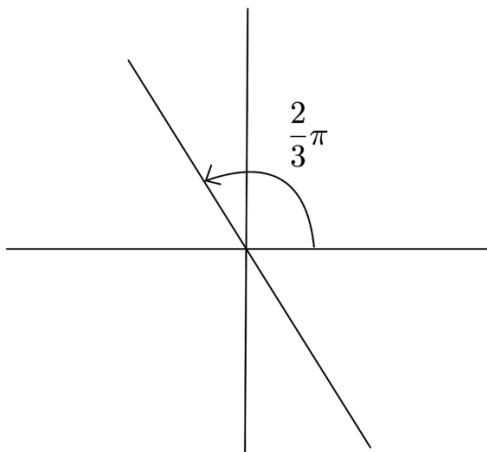
$$2\theta = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

よって



III

(問1)

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= [(b-a)(x-a)f'(x)]_a^b - \int \{-(x-a) + (b-x)\} f'(x) dx \\
 &= \int_a^b (2x-a-b)f'(x) dx \\
 &= [(2x-a-b)f(x)]_a^b - \int_a^b 2f(x) dx \\
 &= (b-a)f(b) - (a-b)f(a) - 2 \int_a^b f(x) dx \\
 &= (b-a)(f(b) + f(a)) - 2 \int_a^b f(x) dx = (\text{右辺})
 \end{aligned}$$

(問2)

問1で $a = t, b = t + 1, f(x) = \log x$ とすると $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

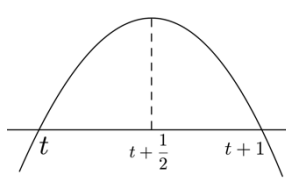
$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+1} (t+1-x)(x-t) \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx &= \log t + \log(t+1) - 2 \int_t^{t+1} \log x dx \\
 \Leftrightarrow \int_t^{t+1} \log x dx - \frac{1}{2} \{\log t + \log(t+1)\} &= \frac{1}{2} \int_t^{t+1} (t+1-x)(x-t) \frac{1}{x^2} dx
 \end{aligned}$$

$t \leq x \leq t+1$ において

$$t+1-x \geq 0, \quad x-t \geq 0, \quad \frac{1}{x^2} > 0 \text{ より (右辺の被積分関数)} \geq 0$$

よって (右辺) ≥ 0

また



$$\begin{aligned}
 (t+1-x)(x-t) &\leq \left\{t+1 - \left(t + \frac{1}{2}\right)\right\} \left\{t + \frac{1}{2} - t\right\} = \frac{1}{4} \\
 \text{よって} & \int_t^{t+1} (t+1-x)(x-t) - \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{4} \int_t^{t+1} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t}\right)
 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{1}{2} \int_t^{t+1} (t+1-x)(x-t) \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t}\right) \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq \int_t^{t+1} \log x dx - \frac{1}{2} \{\log t + \log(t+1)\} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)
 \end{aligned}$$



(問3)

 $t = 1, 2, 3, \dots, n-1$ とし, それらの和をとると

$$0 \leq \int_1^n \log x \, dx - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \{\log k + \log(k+1)\} \leq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n \log n - n - \sum_{k=1}^n \log k + \frac{1}{2} \log n \leq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n \log n - n - \log n! + \frac{1}{2} \log n \leq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \log n - a_n \leq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

 $\log n$ で割って

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{a_n}{\log n} \leq \frac{1}{8 \log n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

ここで右辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よってはさみうちの定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_n}{\log n} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n} = \frac{1}{2}$$



IV

(問1)

$${}_p C_j = \frac{p!}{j!(p-j)!}$$

$j, p-j$ はいずれも p より小さい自然数なので、 $j!, (p-j)!$ はいずれも p を素因数に持たない。
したがって分子の p は p 以下のいかなる数にも割れないので、 ${}_p C_j$ は p の倍数。

(問2)

$$(m+1)^p = \sum_{k=0}^p {}_p C_k m^k$$

よって

$$(m+1)^p - m^p - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p C_k m^k$$

ここで、各 ${}_p C_k$ は $0 < k < p$ なので、問1より p の倍数
よって $(m+1)^p - m^p - 1$ は p で割り切れる

(問3)

問2より

$$(m+1)^p - m^p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

と表される。

$$\therefore (m+1)^p - (m^p - m) - (m+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^p - (m+1) \equiv m^p - m \pmod{p}$$

ここで

$m=1$ のとき $1^p - 1 = 0$ は p で割り切れる。

$m=k$ のとき $k^p - k \equiv 0 \pmod{p}$ とすると $m=k+1$ のとき

$$(k+1)^p - (k+1) \equiv k^p - k \equiv 0 \pmod{p}$$

となり、 $m=k+1$ のときも p で割り切れる。よって示された。

$$m^p - m = m(m^{p-1} - 1)$$

m が p で割り切れないとき、 $m^p - m$ が p で割り切れるので、 $m^{p-1} - 1$ が p で割り切れる。

(問4)

$$\begin{aligned} a &= 4n^2 + 4n - 1 \\ &= (2n+1)^2 - 2 \end{aligned}$$

a と $2n+1$ が共通素因数 p をもつとする ($p > 1$)

$$a = a'p$$

$$2n+1 = pn' \quad (a', n' \text{ は自然数})$$



このとき

$$a'p = p^2n'^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow 2 = p(pn'^2 - a')$$

よって p は 2 の約数かつ 1 より大きい素数なので、 $p = 2$ となる。

これより a が 2 の倍数となるが、 $a = 4n(n+1) - 1$ は奇数なので矛盾する。

よって a と $2n+1$ は共通の素因数をもたず、互いに素

(問5)

$$a = 4n^2 + 4n - 1 = (2n+1)^2 - 2 \equiv 0 \pmod{p} \quad \cdots (*)$$

と表される。問4より $2n+1$ は p では割り切れない。

よって 問3より

$$(2n+1)^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

となる。(*)より $(2n+1) = (2+kp)^{\frac{1}{2}}$ を代入

$$(2+kp)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{2j} 2^j (kp)^{\frac{p-1}{2}-j} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$2^{\frac{p-1}{2}} + \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}-1} \binom{p-1}{2j} 2^j (kp)^{\frac{p-1}{2}-j} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = k'p - \sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} \binom{p-1}{2j} 2^j (kp)^{\frac{p-1}{2}-j}$$

$$= p \left\{ k' - \sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} \binom{p-1}{2j} 2^j k^{\frac{p-1}{2}-j} p^{\frac{p-3}{2}-j} \right\} \equiv 0 \pmod{p}$$

となるので、 $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は p で割り切れる。

