I

（1）

$$
\begin{aligned}
&(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k-2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}\\
&=(-1)^n\left[\frac{1}{x+1}-1-\frac{(-x)\left\{1-(-x)^{n-1}\right\}}{1-(-x)}\right]\\
&=(-1)^n\frac{1}{x+1}\left\{1-(x+1)+x-x(-x)^{n-1}\right\}\\
&=(-1)^n\frac{1}{x+1}(-1)^n x^n\\
&=\frac{x^n}{x+1}
\end{aligned}
$$

よって，$\dfrac{x^n}{x+1}-\dfrac{1}{2}x^n=\dfrac{1-x}{2(x+1)}x^n\geqq 0\quad(\because 0\leqq x\leqq 1)$

$$
\begin{aligned}
&x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}-\frac{x^n}{x+1}\\
&=\frac{1}{2(x+1)}\left\{2(x+1)-x(x+1)-2\right\}x^n\\
&=\frac{1}{2(x+1)}\left(x-x^2\right)x^n=\frac{1-x}{2(x+1)}x^{n+1}\geqq 0\quad(\because 0\leqq x\leqq 1)
\end{aligned}
$$

（2）

（1）の不等式を 0 から 1 までで積分すると

$$
\int_0^1\frac{1}{2}x^n dx\leqq(-1)^n\int_0^1\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}dx\leqq\int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n-1}\right)dx
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n\left[\log|x+1|-x-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right]_0^1\leqq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n\left(\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\leqq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n\left\{\log 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}\leqq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n\left\{\log 2-a_n\right\}\leqq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}\\
&\therefore\frac{n}{2(n+1)}\leqq(-1)^n n\left\{\log 2-a_n\right\}\leqq n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)}\right)=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}$ なので

はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n n\left(\log 2-a_n\right)=\frac{1}{2}$，　　$\displaystyle\therefore\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n-\log 2)=-\frac{1}{2}$

II

$$\left|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right| = 1$$
$$\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{3}$$

（1）

$$\begin{aligned}
&\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right)+\left|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2\\
=&\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\\
=&\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot 3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) = 3\times\frac{1}{3} = 1
\end{aligned}$$

よって $\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right) = 1-1^2 = 0$

（2）

$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ とおくと

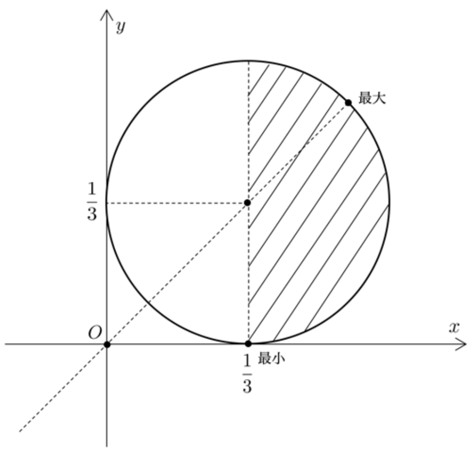
$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OD}\right| = 1,\quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} = 0$$

このとき P は

$\left|\overrightarrow{OP}-\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}\right| \leqq \dfrac{1}{3}$ かつ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \leqq \dfrac{1}{3}$ となる

ここで，$\overrightarrow{OC} = (1,0)$, $\overrightarrow{OD} = (0,1)$, $\overrightarrow{OP} = (X,Y)$ とおくことができるので

$$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}\right| \leqq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 \leqq \frac{1}{9}$$
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \leqq \frac{1}{3} \Leftrightarrow X \leqq \frac{1}{3}$$



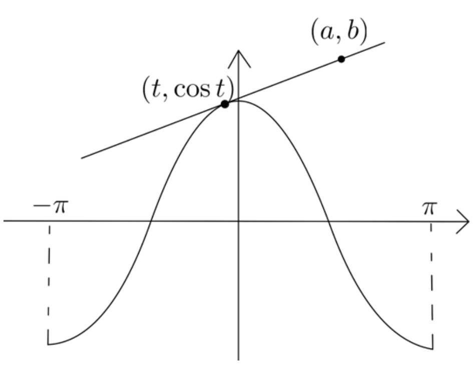
となるのでこれをみたす領域は左図のようになる

よって，$\left|\overrightarrow{OP}\right|$ の最大値は $\overrightarrow{OP} = \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

のときで，$\dfrac{1}{3}\sqrt{2}+\dfrac{1}{3}$

$\left|\overrightarrow{OP}\right|$ の最小値は $\overrightarrow{OP} = \left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ のときで $\dfrac{1}{3}$

III



$$y=\cos x$$
$$y'=-\sin x$$

(t, cos t)における接線は

$$y-\cos t=-\sin t(x-t)$$

これが P を通る

$$b=-\sin t(a-t)+\cos t$$

ここで

$$f(t)=(t-a)\sin t+\cos t$$

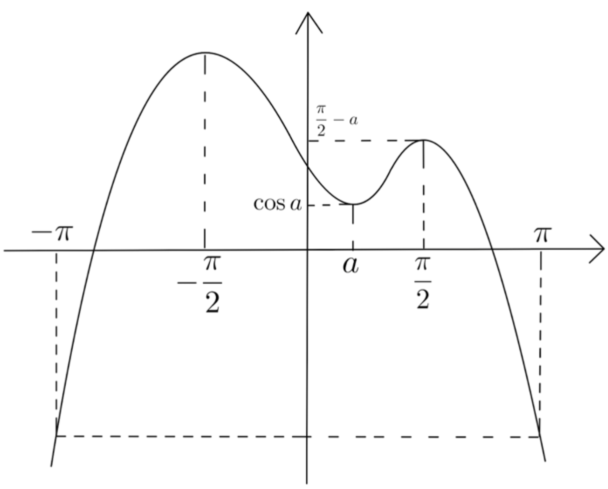
とすると

$$\begin{aligned} f'(t)&=\sin t+(t-a)\cos t-\sin t \\ &=(t-a)\cos t \quad (0<a<\pi) \end{aligned}$$

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき,

増減表は

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		a		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	↗	$\frac{\pi}{2}+a$	↘	$\cos a$	↗	$\frac{\pi}{2}-a$	↘	-1



$y=f(t)$ と $y=b$ が異なる 4 点で交わるのは

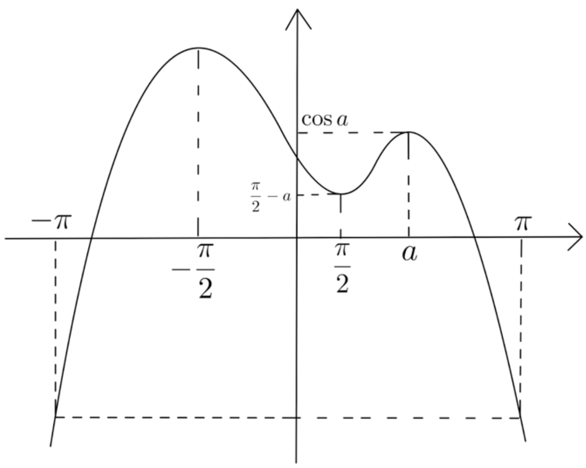
$$\cos a<b<\frac{\pi}{2}-a$$

異なる接線には異なる接点が対応するのでこれが $N(P)=4$ となる条件である.

$\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$ のとき,

増減表

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		a		π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	↗	$\frac{\pi}{2}+a$	↘	$\frac{\pi}{2}-a$	↗	$\cos a$	↘	-1

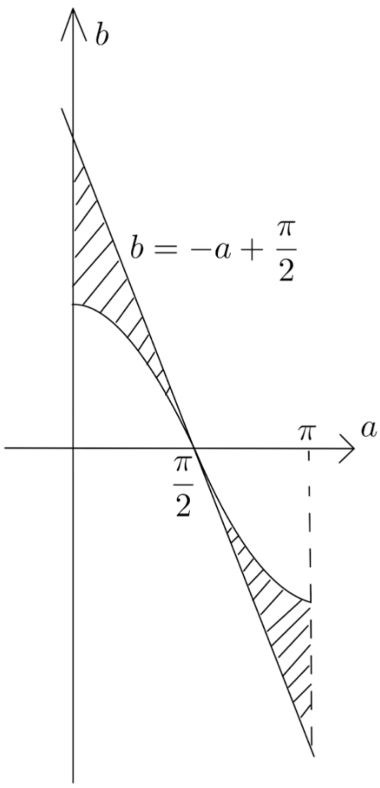


先程と同様に

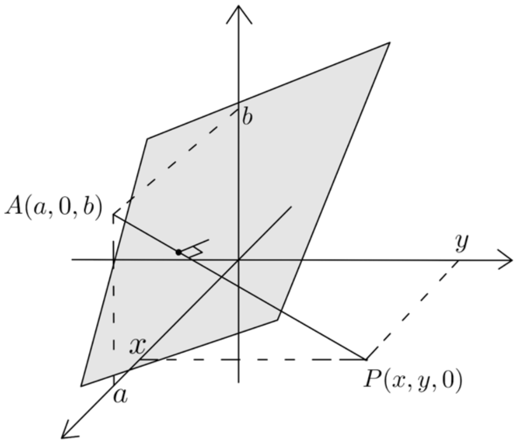
$N(P)=4$ となるのは

$\dfrac{\pi}{2}-a < b < \cos a$

以上より 求める範囲は



IV



$\overrightarrow{AP}=(x-a,\ y,\ -b)$ より α の方程式は
$(x-a)X+yY-bZ=0$

（1）

Q は直径 AP 上に存在するので

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$（$k$ は実数）

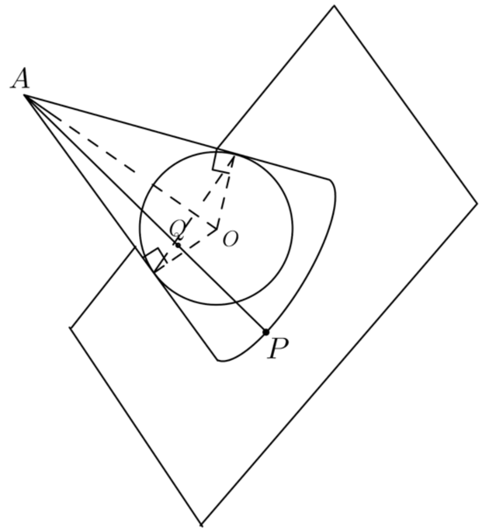
よって

$$\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\right)^2=\left(\overrightarrow{AP}\cdot k\overrightarrow{AP}\right)^2=k^2\left|\overrightarrow{AP}\right|^4$$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2\left|\overrightarrow{AQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{AP}\right|^2\cdot\left|k\overrightarrow{AP}\right|^2=k^2\left|\overrightarrow{AP}\right|^4$$

よって成立.

（2）



$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 1$ をみたすので

Oを中心とする半径1の球を考え，Aから球と内接するような円錐を考えると，円錐との交点がQの軌跡であり，円錐側面とXY平面が交わる線がPの軌跡となる．

$\overrightarrow{AO} = (-a,\ 0,\ -b)$，$\angle OAQ = \theta$ とすると

$$\cos\theta = \frac{AQ}{OA} = \frac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

円錐側面上の任意の点を$R(X,\ Y,\ Z)$ とすると

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AR} = \left|\overrightarrow{AO}\right|\left|\overrightarrow{AR}\right|\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow (-a,\ 0,\ -b)(X-a,\ Y,\ Z-b)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(X-a)^2+Y^2+(Z-b)^2}\frac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$-a(X-a)-b(Z-b) = \sqrt{a^2+b^2-1}\sqrt{(X-a)^2+Y^2+(Z-b)^2}$$

$$\therefore \{a(X-a)+b(Z-b)\}^2 = (a^2+b^2-1)\left\{(X-a)^2+Y^2+(Z-b)^2\right\}$$

X-Y 平面と交わる線は Z＝0 として

$$\left\{a(X-a)-b^2\right\}^2 = (a^2+b^2-1)\left\{(X-a)^2+Y^2+b^2\right\}$$

$$aX-(a^2+b^2)$$

$$a^2X^2-2a(a^2+b^2)X+(a^2+b^2)^2$$

$$=(a^2+b^2-1)(X-a)^2+(a^2+b^2-1)Y^2+b^2(a^2+b^2-1)$$

$$=(a^2+b^2-1)X^2-2a(a^2+b^2-1)X+(a^2+b^2-1)Y^2+(a^2+b^2)(a^2+b^2-1)$$

$$(b^2-1)X^2+2aX+(a^2+b^2-1)Y^2 = a^2+b^2$$

$$(b^2-1)\left\{X^2+\frac{2a}{b^2-1}X\right\}+(a^2+b^2-1)Y^2 = a^2+b^2$$

$$(b^2-1)\left(X+\frac{a}{b^2-1}\right)^2+(a^2+b^2-1)Y^2 = a^2+b^2+\frac{a^2}{b^2-1}$$

$$=\frac{a^2b^2}{b^2-1}+b^2$$

$$=b^2\left(1+\frac{a^2}{b-1}\right)$$

$$=\frac{b^2(a^2+b^2-1}{b^2-1}$$

$$\frac{(b^2-1)^2}{b^2(a^2+b^2-1)}\left(X+\frac{a}{b^2-1}\right)^2+\frac{b^2-1}{b^2}Y^2=1$$

$b<-1,\ 1<b$ のとき楕円

$$\frac{\left(X+\frac{a}{b^2-1}\right)^2}{\left(\frac{b\sqrt{a^2+b^2-1}}{b^2-1}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\right)^2}=1$$

$-1<b<1$ のとき双曲線

$$\frac{\left(X+\frac{a}{b^2-1}\right)^2}{\left(\frac{b\sqrt{a^2+b^2-1}}{b^2-1}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\right)^2}=1$$

$b=\pm1$ のとき放物線

$$\begin{aligned}2aX+a^2Y^2&=a^2+1\\ a^2Y^2&=-2aX+a^2+1\\ Y^2&=-\frac{2}{a}X+\frac{a^2+1}{2a}\\ &=-\frac{2}{a}\left(X-\frac{a^2+1}{2a}\right)\\ &=4\left(-\frac{1}{2a}\right)\left(X-\frac{a^2+1}{2a}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{V}}$

（1）

P_1 ： $b_1 = {a_1}^{1-1}a_1 = a_1$が 7 の倍数

P_2 ： $b_2 = {a_1}^{2-1}a_1 + {a_1}^{2-2}a_2 = {a_1}^2 + a_2$が 7 の倍数

${a_1}^2$: 1, 4, 9, 16, 25, 36

: 1, 4, 2, 2, 4, 1

a_2 : 6, 3, 5, 5, 3, 6

（2）

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} {a_1}^{n+1-k}a_k \\
&= a_1 \sum_{k=1}^{n+1} {a_1}^{n-k}a_k \\
&= a_1 \left(\sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k}a_k + a_1^{-1}a_{n+1} \right) \\
&= a_1 \sum_{k=1}^{n} a_1^{n-k}a_k + a_{n+1} \\
&= a_1 b_n + a_{n+1}
\end{aligned}$$

よって b_n が 7 の倍数のとき $a_1 b_n$は 7 の倍数であり $a \geqq a_{n+1} \geqq 6$ であるから b_{n+1}は 7 の倍数になることはない.

b_nが 7 の倍数でないとき $a_1 b_n$も 7 の倍数ではないで $a_1 b_n$を 7 で割った余りを r とすると $a_{n+1} = 7 - r$ のときのみ b_{n+1}は 7 の倍数になる.
したがって

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= (1 - p_n) \times \frac{1}{6} \\
&= -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6} \quad (p_1 = 0)
\end{aligned}$$

$$\therefore p_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{7}\right)$$

$$p_n - \frac{1}{7} = \left(0 - \frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$