

I

(1)

$$\int_1^4 \sqrt{x} \log(x^2) dx$$

$t = \sqrt{x}$ とおくと, $2t dt = dx$

$$\frac{x}{t} \left| \begin{array}{l} 1 \rightarrow 4 \\ 1 \rightarrow 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & \int_1^2 t \log t^4 \cdot 2t dt \\ &= 8 \int_1^2 t^2 \log t dt \\ &= 8 \left\{ \left[\frac{1}{3} t^3 \log t \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} t^3 \cdot \frac{1}{t} dt \right\} \\ &= 8 \left\{ \frac{8}{3} \log 2 - \frac{1}{3} \int_1^2 t^2 dt \right\} \\ &= \frac{8}{3} \left\{ 8 \log 2 - \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^2 \right\} \\ &= \frac{8}{3} \left\{ 8 \log 2 - \frac{7}{3} \right\} \\ &= \frac{64}{3} \log 2 - \frac{56}{9} \end{aligned}$$

(2)

$$x^{2023} - 1 = x^3 (x^{2020} - 1) + x^3 - 1$$

ここで

$$\begin{aligned} x^{2020} - 1 &= (x^5)^{404} - 1 \\ &= (x^5 - 1) \cdot \sum_{k=0}^{403} x^{5k} \\ &= (x - 1) (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot \sum_{k=0}^{403} x^{5k} \end{aligned}$$

より, $x^{2020} - 1$ は $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割り切れる. よって余りは $x^3 - 1$



II

(1)

R は OD と平面 **CPQ** の交点となる. R は平面 CPQ 上の点なので

$$\begin{aligned}\vec{OR} &= r\vec{OP} + s\vec{OQ} + t\vec{OC} \quad (r + s + t = 1) \\ &= \frac{1}{3}r\vec{OA} + \frac{1}{2}s\vec{OB} + t\vec{OC}\end{aligned}$$

R は OD 上の点でもあるので,

$$\vec{OR} = k\vec{OD} = k\vec{OA} + 2k\vec{OB} + 3k\vec{OC}$$

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ は互いに一次独立なので

$$\frac{1}{3}r = k, \quad \frac{1}{2}s = 2k, \quad t = 3k$$

$$\Leftrightarrow r = 3k, \quad s = 4k, \quad t = 3k$$

$r + s + t = 1$ に代入して,

$$k = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \vec{OR} = \frac{1}{10} (\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC})$$

これより,

$$OR : RD = \frac{1}{10} : \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 1 : 9$$



III

(1)

Y が5で割り切れるのは $X_1, X_2 \cdots X_n$ の中に少なくとも1つ5があること、すなわち n 回サイコロを投げたとして、少なくとも1回は5の目が出ることである。

$$\therefore 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2)

Y が15で割り切れるのは、 n 回サイコロを投げたとき、少なくとも1回

① 5の目

② 3または6の目

が含まれることである。

ここで、

- 5の目を1つも含まない $\left(\frac{5}{6}\right)^n$
- 3, 6の目を1つも含まない $\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- 3, 5, 6を1つも含まない $\left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

よって、求める確率は

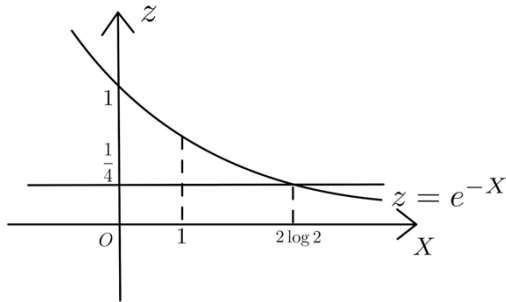
$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



IV

$x^2 = X$ とし, $g(X) = e^{-X} + \frac{1}{4} + 1$ とおく

ここで, $-1 \leq x \leq 1$ より $0 \leq X \leq 1$



$$e^{-X} = \frac{1}{4} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} -X &= \log \frac{1}{4} \\ &= -2 \log 2 \\ X &= 2 \log 2 \\ &= \log_2 4 > 1 \end{aligned}$$

$0 < X < 1$ において, $g'(X) < 0$ より

$g(X)$ は単調減少.

$$g(0) = 1 + 1 = 2$$

$$g(1) = e^{-1} + \frac{5}{4} = \frac{1}{e} + \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{5}{4} \leq g(X) \leq 2$$

$z = g(X)$ とおくと

$$f(x) = z + \frac{1}{z} \quad \left(\frac{5}{4} \leq x \leq 2 \right)$$

これを $h(x)$ とおくと

$$h(z) = z + \frac{1}{z}$$

$$h'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

$\frac{5}{4} \leq z \leq 2$ より, $h'(z) > 0$ となるので, $h(z)$ は単調増加関数.

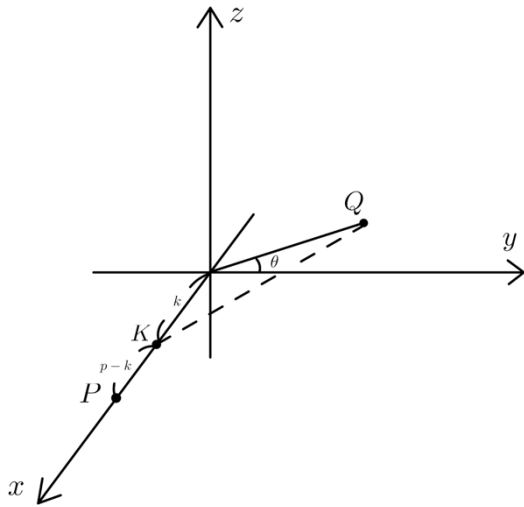
よって

$$\text{最小値は } z = \frac{5}{4} \text{ のとき } z = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{41}{20}$$

$$\text{最大値は } z = 2 \text{ のとき } 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$



V



$$P(p, 0, 0)$$

$$Q(0, r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおくと $|p| + r = 1$

よって PQ の通過範囲がつくる立体は yz 平面に対して対象である. よって $p \geq 0$ の場合を考える.

このとき

$$P(p, 0, 0), Q(0, (1-p) \cos \theta, (1-p) \sin \theta)$$

$$(0 \leq p \leq 1)$$

と表される.

線分 PQ 上の x 座標が k である点は $(0 \leq k \leq p)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \{ k \vec{OP} + (p-k) \vec{OQ} \} \\ &= \frac{1}{p} \{ k(p, 0, 0) + (p-k)(0, (1-p) \cos \theta, (1-p) \sin \theta) \} \\ &= (k, 0, 0) + \left(0, \frac{(1-p)(p-k)}{p} \cos \theta, \frac{(1-p)(p-k)}{p} \sin \theta \right) \\ &= \left(k, \frac{(1-p)(p-k)}{p} \cos \theta, \frac{(1-p)(p-k)}{p} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

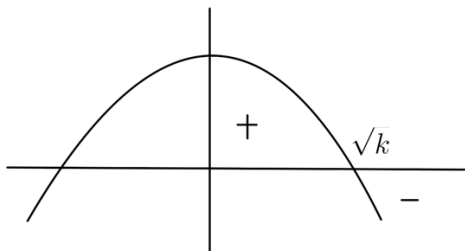
θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を動くとして この点は $x = k$ 平面上 中心 $(k, 0, 0)$, 半径 $\frac{(1-p)(p-k)}{p}$ の円を描く.

く.

ここで この半径を $R(p)$ とすると

$$R(p) = \frac{(1-p)(p-k)}{p} \quad (k \leq p \leq 1)$$

$$\begin{aligned} R'(p) &= \frac{\{-(p-k)(1-p)\}p - (1-p)(p-k)}{p^2} \\ &= \frac{1}{p^2}(-p^2 + k) \end{aligned}$$



p	k		\sqrt{k}		1
$R'(p)$		+	0	-	
$R(p)$	0	↗		↘	0



$$R(\sqrt{k}) = \frac{(1 - \sqrt{k})(\sqrt{k} - k)}{\sqrt{k}} = (1 - \sqrt{k})^2$$

よって p が $0 \leq p \leq 1$ に変化するとき $x = k$ の平面上 中心 $(k, 0, 0)$ 半径 $(1 - \sqrt{k})^2$ の円を描

く. よって求める体積は

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \int_0^1 \pi (1 - \sqrt{k})^2 dk \\ &= 2\pi \int_0^1 (k - 2\sqrt{k} + 1) dk \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}k^2 - \frac{4}{3}k + k \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{3}{6} - \frac{8}{6} + \frac{6}{6} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



VI

(1)

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) \\ &= \cos\theta \cos 2\theta - \sin\theta \sin 2\theta \\ &= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos 2(2\theta) \\ &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\ &= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\sin^2\theta - 1 \\ \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \cos 4\theta &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

より, $\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + (\cos\theta \text{ の } (n-1) \text{ 次以下の整式})$ と推測される.

同様に

$\sin n\theta = \sin\theta(2^{n-1}\cos^{n-1}\theta + (\cos\theta \text{ の } (n-2) \text{ 次以下の整式})$ と推測される. 以下帰納法で示す

$n = 1$ のとき $\cos\theta = 2^{1-1}\cos\theta$, $\sin\theta = \sin\theta \cdot (2^0\cos^0\theta) = \sin\theta$ より成立

$n = k$ のとき 成立すると仮定する.

$$\begin{aligned}\cos k\theta &= 2^{k-1}\cos^k\theta + g(\cos\theta) \quad g(x) \text{ は } k-1 \text{ 次以下の整式} \\ \sin k\theta &= \sin\theta \times \{2^{k-1}\cos^{k-1}\theta + h(\cos\theta)\} \quad h(x) \text{ は } k-2 \text{ 次以下の整式}\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\theta &= \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta \\ &= 2^{k-1}\cos^{k+1}\theta + \cos\theta \cdot g(\cos\theta) - \sin^2\theta(2^{k-1}\cos^{k-1}\theta + h(\cos\theta)) \\ &= 2^{k-1}\cos^{k+1}\theta + g(\cos\theta)\cos\theta - (1 - \cos^2\theta)(2^{k-1}\cos^{k-1}\theta + h(\cos\theta)) \\ &= (2^{k-1} + 2^{k-1})\cos^{k+1}\theta + g(\cos\theta)\cos\theta + h(\cos\theta)\cos^2\theta - (2^{k-1}\cos^{k-1}\theta + h(\cos\theta)) \\ &= 2^k\cos^{k+1}\theta + (\cos\theta \text{ の } k \text{ 次以下の整式})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(k+1)\theta &= \sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta \sin\theta \\ &= \sin\theta \times \{2^{k-1}\cos^k\theta + h(\cos\theta)\cos\theta\} + \{2^{k-1}\cos^k\theta + g(\cos\theta)\}\sin\theta \\ &= \sin\theta \times \{2^k\cos^k\theta + (\cos\theta \text{ の } k-1 \text{ 次以下の整式})\}\end{aligned}$$

次に $\theta = \frac{m}{n}\pi$ となる自然数 m, n が存在したとすると

$$n\theta = m\pi$$

よって $\cos n\theta = \cos m\pi = (-1)^m$

したがって

$\therefore 2^{n-1}\cos^n\theta + (\cos\theta \text{ の } n-1 \text{ 次以下の整式}) = (-1)^m$



$\cos \theta = \frac{1}{p}$ を代入

$$2^{n-1} \frac{1}{p^n} + \left(\frac{1}{p} \text{ の } n-1 \text{ 次以下の整式}\right) = (-1)^m$$

$$\therefore 2^{n-1} + p^n \left(\frac{1}{p} \text{ の } n-1 \text{ 次以下の整式}\right) = (-1)^m p^n$$

$$2^{n-1} + p \left(\frac{1}{p} \text{ の } n-1 \text{ 次以下の整式}\right) = (-1)^m p^n$$

$$2^{n-1} = p \{(-1)^m p^{n-1} - (\text{p の } n-1 \text{ 次以下の整式})\}$$

となる. ここで p は 2^{n-1} の約数となるが p は素数なので $p=2$ これは p が 3 以上の整式であることに反する. よってこのような m, n は存在しない.

