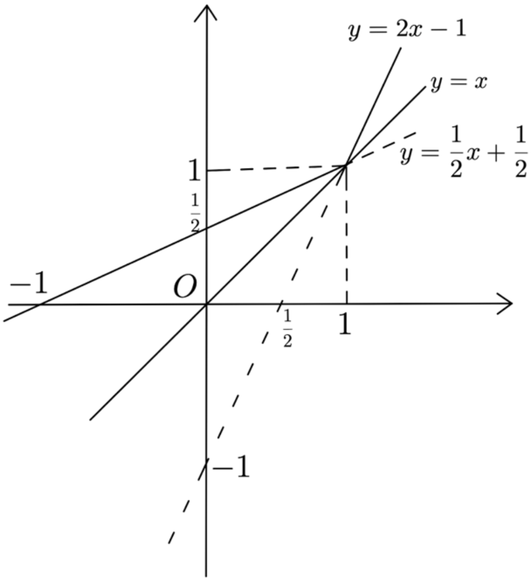
I

（1）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & (x\leqq 1)\\ 2x-1 & (x>1)\end{cases}$$



（1）

$x\leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)-x&=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-x\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\\&=\frac{1}{2}(1-x)\leqq 0\end{aligned}$$

$x>1$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)-x&=2x-1-x\\&=x-1>0\end{aligned}$$

よって成立.

（2）

$a_1=a\leqq 1$

$a_n\leqq 1$ とすると

$a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$ より

$$1-a_{n+1}=1-\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-a_n)\geqq 0$$

よって 数学的帰納法により すべての自然数 n に対して $a_n\leqq 1$

（3）

（2）より，すべての自然数 n に対して $a_n\leqq 1$ なので

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2},\quad a_1=1(\leqq 1)$$

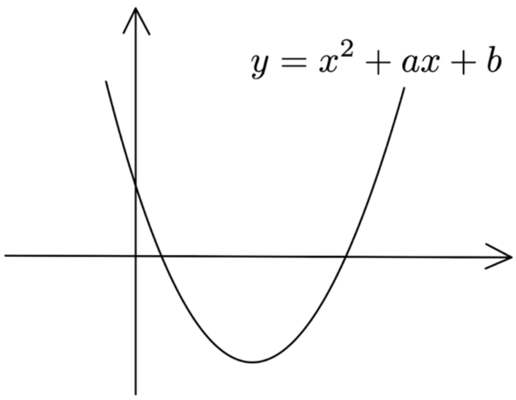
$$\Leftrightarrow a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$$

$$a_n-1=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=1-(1-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ⅱ

（1）



(i) 判別式 : D > 0

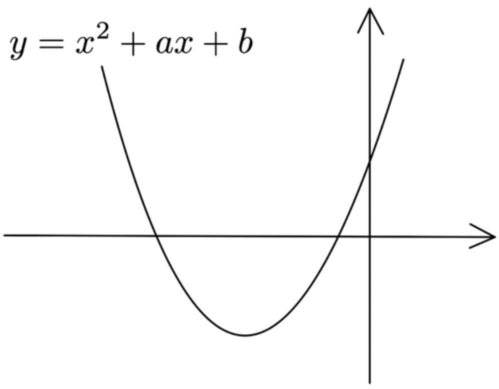
$\Leftrightarrow a^2-4b>0 \Leftrightarrow b<\frac{1}{4}a^2$

(ii) 軸 : $x=-\frac{a}{2}>0$

$\Leftrightarrow a<0$

(iii) $f(0)=b>0$

（2） $f(x)=0$ の解が実数のとき



(i) 判別式 : $D \geqq 0$

$\Leftrightarrow b \leqq \frac{1}{4}a^2$

(ii) 軸 : $x=-\frac{a}{2}<0$

$\Leftrightarrow a>0$

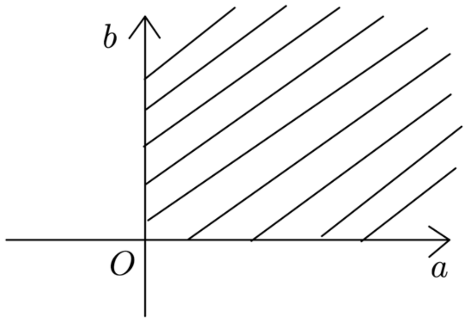
(iii) $f(0)=b>0$

解が虚数のとき

(i) $D<0 \ \Leftrightarrow \ b>\frac{1}{4}a^2$

(ii) 解の実部 : $-\frac{a}{2}<0 \ \Leftrightarrow \ a>0$

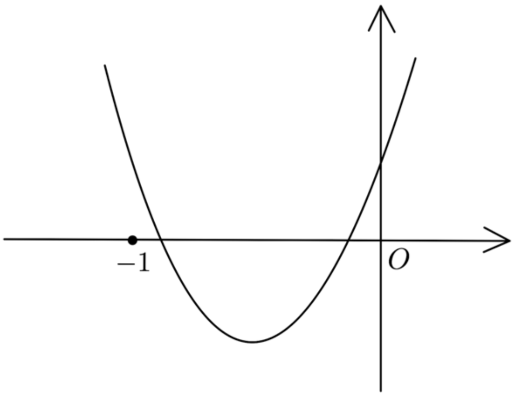
以上より $a>0,\ b>0$



(境界線を含まない)

（3）

$f(x)=0$ の解が実数のとき



(i) 判別式：$D \geqq 0$

$\Leftrightarrow b \leqq \dfrac{1}{4}a^2$

(ii) 軸：$x=-\dfrac{a}{2}$

$\therefore -1<-\dfrac{a}{2}<0$

$\Leftrightarrow 0<a<2$

(iii) $f(0)=b>0$

$f(-1)=1-a+b>0$

$\Leftrightarrow b>a-1$

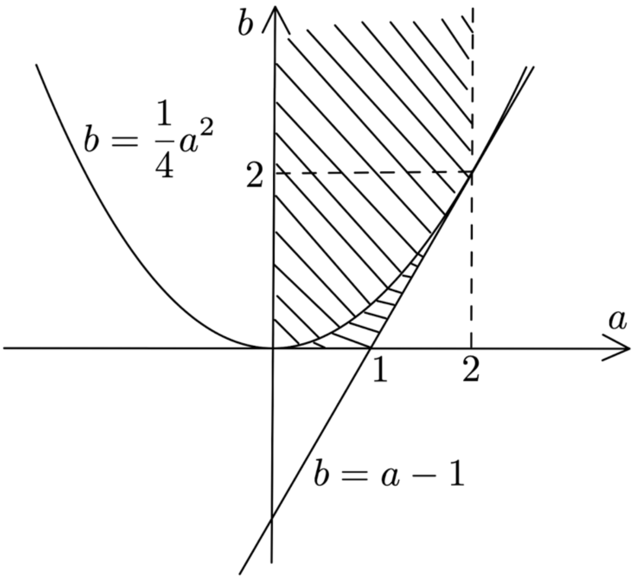
解が虚数のとき

(i) 判別式：$D<0 \Leftrightarrow b>\dfrac{1}{4}a^2$

(ii) 解の実部：$-1<-\dfrac{a}{2}<0$

$\Leftrightarrow 0<a<2$

以上より



境界線は含まない

III

（1）

偶数の n 枚から 2 枚または素数の n 枚から 2 枚を選べばよい

$$\frac{{}_nC_2 + {}_nC_2}{{}_{2n}C_2} = \frac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}$$

（2）

3 枚のカードの和が偶数となるのは

(i) 3 枚とも偶数 ： ${}_nC_3$ 通り

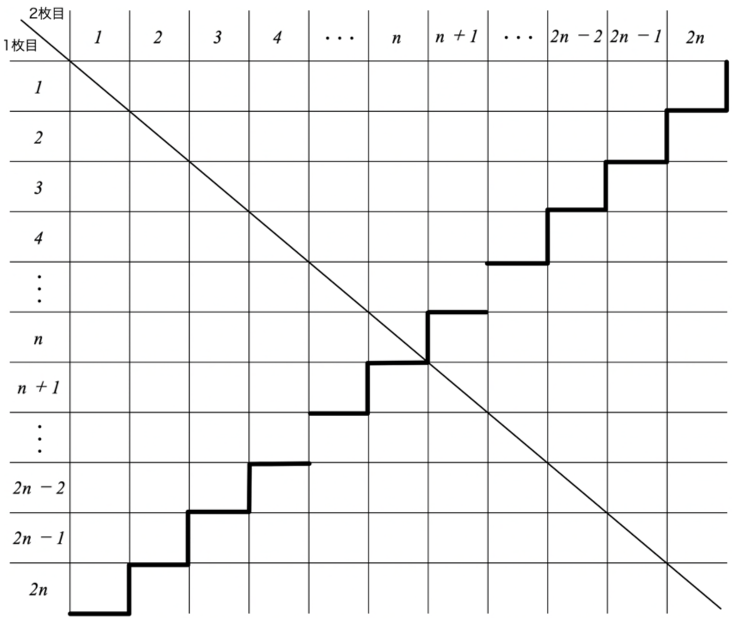
(ii) 1 枚が偶数, 2 枚が奇数 ： ${}_nC_1 \times {}_nC_2$

の場合なので

$$\frac{{}_nC_3 + {}_nC_1 \times {}_nC_2}{{}_{2n}C_3} = \frac{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + n \times \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{1}{6}2n(2n-1)(2n-2)}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2) + 3n^2(n-1)}{4n(2n-1)(n-1)}$$
$$= \frac{n-2+3n}{4(2n-1)} = \frac{2(2n-1)}{4(2n-1)} = \frac{1}{2}$$

（3）

カードの取り出し方は



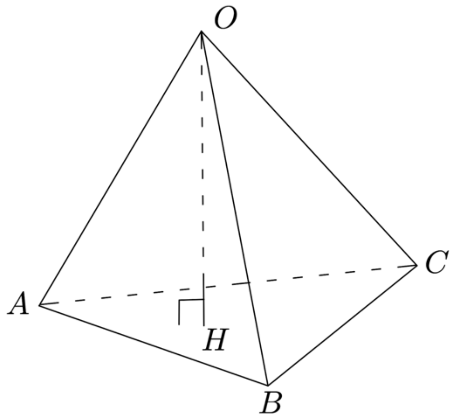
$$(1+2+3+\cdots+2n) - n = \frac{2n(2n+1)}{2} - n = 2n^2 \text{ 通り}$$

全体は

$(2n)^2 - 2n = 2n(2n-1)$ 通りなので

$$\frac{2n^2}{2n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$$

IV



（1）

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$= 13 + 25 - 2 = 36$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$$

（2）

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$
$$= (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

$r = 1 - s - t$ とおくと

$$\overrightarrow{OH} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC},\ r+s+t=1$$

OH は△ABC に垂直なので

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$\Leftrightarrow r\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$= r\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + s\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$= r\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + t\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$$
$$\Leftrightarrow 13r + s + t = r + 25s - 11t = r - 11s + 25t$$

これを解いて

$$12r + 12t = 24s$$
$$\Leftrightarrow r + t = 2s$$
$$\Leftrightarrow 1 - s = 2s$$
$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$36s = 36t$$
$$\Leftrightarrow s = t = \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$$

$$\therefore s = t = \frac{1}{3}$$

（3）

$$\left|\overrightarrow{OH}\right|^2=\left|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right|^2$$
$$=\frac{1}{9}\left\{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{9}\{13+25+25+2(1+1-11)\}$$
$$=\frac{1}{9}(63-18)=5$$

$$\left|\overrightarrow{OH}\right|=\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=13+25-2=36$$
$$\therefore\left|\overrightarrow{AC}\right|=6$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$=13-1-1-11=0$$

$$\therefore\triangle ABC=6\times 6\times\frac{1}{2}=18$$

$$OABC=\frac{1}{3}\times 18\times 5=30$$

V

$$x = \sin t$$
$$y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

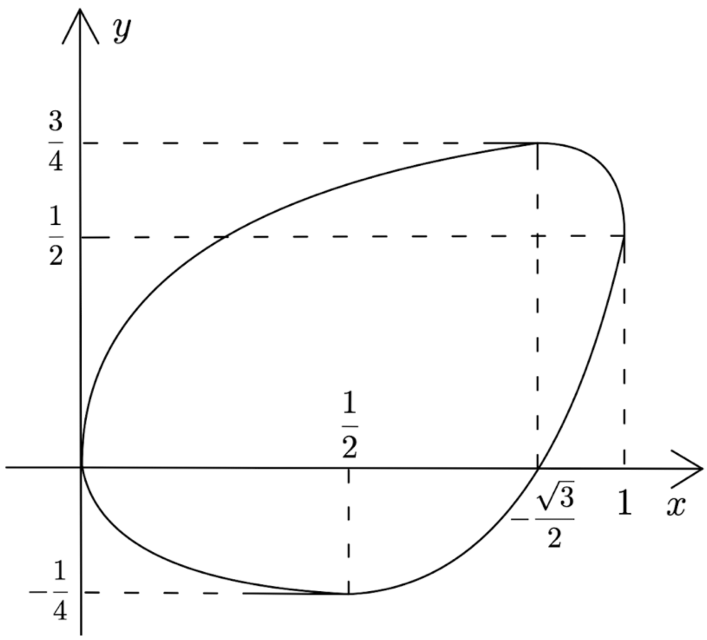
（1）

$$\frac{dx}{dt} = \cos t = 0 \quad \therefore t = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\sin t + \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\cos t$$
$$= \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\therefore 2t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$
$$2t = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$
$$t = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi$$

（2）

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5}{6}\pi$		π	
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
x	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	$\frac{1}{2}$	$\leftarrow$	0	
y	0	$\uparrow$	$\frac{3}{4}$	$\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$\downarrow$	$-\frac{1}{4}$	$\uparrow$	0	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\swarrow$		$\nwarrow$		



（3）

$y=0$ となるのは $t=0,\ \pi,\ \dfrac{2}{3}\pi$　　$t=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって求める面積は C の $y \leqq 0$ の部分を y_- とすると

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi} y_-\,dx &= -\int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\cos t\,dt \\
&= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left\{\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}dt \\
&= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\cos\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{3}\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\cos\frac{5}{6}\pi+\cos\frac{7}{6}\pi-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5}{6}\pi\right\} \\
&= -\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3}-1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}
$$